



## Simulação Numérica da Difusão de Calor Bidimensional no Substrato Frio de um Cooler Termoelétrico Utilizando o Método de Lattice Boltzmann

*Luben Cabezas-Gómez*

*Universidade de São Paulo; Escola de Engenharia de São Carlos – Núcleo de Térmica e Fluidos  
lubencg@sc.usp.br)*

*Matheus dos Santos Guzella*

*Universidade de São Paulo; Escola de Engenharia de São Carlos – Núcleo de Térmica e Fluidos  
matheusguzella@gmail.com*

*Gustavo dos Santos Ribeiro*

*Universidade de São Paulo; Escola de Engenharia de São Carlos – Núcleo de Térmica e Fluidos  
gustavo.srbr@gmail.com*

*Luiz Eduardo Czelusniak*

*Universidade de São Paulo; Escola de Engenharia de São Carlos – Núcleo de Térmica e Fluidos  
luizedu.cze@gmail.com*

*Vinicius Pessoa Mapelli*

*Universidade de São Paulo; Escola de Engenharia de São Carlos – Núcleo de Térmica e Fluidos  
viniciusmapelli@gmail.com*

**Resumo:** O método de Lattice Boltzmann (LB) tem sido desenvolvido ao longo dos últimos 25 anos, convertendo-se em uma ferramenta de simulação poderosa para um amplo espectro de processos e fenômenos. O método de LB possui algumas vantagens em relação aos métodos de DFC tradicionais com base na hipótese do meio contínuo. Coolers termoelétricos (TEC - thermoelectric coolers) podem ser usados como bombas de calor, operando para aquecimento ou resfriamento e como geradores elétricos. Operando como um sistema de refrigeração, apresentam como principais vantagens em relação aos sistemas convencionais a compactidade, simplicidade e confiabilidade (uma vez que não possuem partes móveis). Neste trabalho são realizadas simulações numéricas da difusão bidimensional no substrato frio de um cooler termoelétrico empregando-se o método de LB. Os resultados obtidos são comparados com os resultados de uma solução analítica aproximada disponível na literatura. A comparação dos resultados demonstra a robustez do método de LB, devido aos baixos erros obtidos na comparação.

**Palavras-chave:** Métodos Numéricos e Aplicações. Método de Lattice Boltzmann. Difusão de calor.

### Introdução

O método de LB tem sido desenvolvido ao longo dos últimos 25 anos, se convertendo numa ferramenta de simulação poderosa para um amplo espectro de processos e fenômenos (Li et al., 2005 e trabalhos nele citados). O método de LB possui algumas vantagens em relação aos métodos de DFC tradicionais com base na hipótese do meio contínuo, estas são: O operador convectivo no método LB é linear; O campo de pressões se calcula diretamente através de uma equação de estado; As condições de contorno se formulam por regras mecânicas elementares de acordo com as interações das moléculas nas paredes sólidas; O método é ideal para paralelização em arquiteturas de CPU e GPU heterogêneas, por ser um método explícito e apresentar apenas interações locais e conseqüentemente uma razão comunicação/computação baixa; Algumas variantes do método permitem a modelagem de escoamentos bifásicos diretamente sem a necessidade uma equação para modelar o movimento da

fronteira como nos métodos VOF e Level Set. Entretanto, o método LB apenas permite a realização de cálculos dinâmicos, e não é muito adequado para a simulação em coordenadas curvilíneas e com passos temporais variáveis (integração temporal adaptativa).

O método de LB pode ser classificado como um método baseado em partículas do tipo de baixo para cima empregado para modelar escoamentos de fluidos de uma ou várias fases, considerando um ou vários componentes químicos. De acordo com Kamali e Van den Akker (2013) no método de LB o escoamento de fluido é representado por um sistema de partículas fictícias ou pseudopartículas que residem numa rede (lattice) regular e que possuem velocidades discretas que podem ser representadas por alguma função de distribuição da velocidade. Essas pseudopartículas podem ser consideradas como grupos de moléculas de fluido que se caracterizam por algumas propriedades das porções reais do fluido. Essas porções de fluido se movimentam com velocidades variadas em direções bem definidas para os nós vizinhos da rede e se caracterizam por uma função de distribuição da probabilidade,  $f_i$ , que depende do tempo e espaço.

Coolers termoelétricos são utilizados em aplicações industriais, produtos comerciais, militares e aeroespaciais com o objetivo de resfriar superfícies ou outros equipamentos. Apesar da tecnologia para criação destes equipamentos terem sido desenvolvidas a cerca de 40 anos, ela é ainda grande alvo de pesquisas científicas, principalmente em áreas que envolvem os materiais termoelétricos empregados e nos processos e técnicas de fabricação utilizados. A análise da distribuição da temperatura no substrato frio de um TEC é de elevada importância, já que as dimensões do objeto e do substrato podem não ser iguais. Dulnev and Polchikov (1976) apresentaram a distribuição da temperatura aproximada no substrato frio de um TEC, para o caso de uma fonte de calor situada neste substrato. Drabkin et al. (2004) realizaram a aplicação da solução analítica obtida para verificação e obtiveram perfis de temperatura 2D para o substrato frio. Além disso, discutiram o aumento do desempenho a partir da análise dos resultados obtidos.

Neste trabalho são realizadas simulações numéricas da difusão de calor bidimensional no substrato frio de um cooler termoelétrico. O modelo de LB com operador de colisão BGK é utilizado, considerando-se a estrutura de lattice D2Q9. Os resultados numéricos obtidos são comparados com resultados da solução analítica aproximada de Dulnev and Polchikov (1976).

### Modelo matemático e método numérico

A Figura 1 mostra um modelo esquemático de um TEC de único estágio com uma fonte de calor localizada na superfície fria (Drabkin et al.,2004), considerado neste estudo:

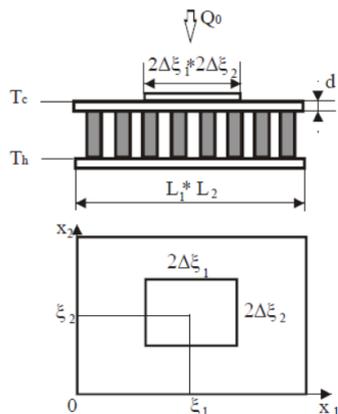


Figura 1: Modelo esquemático de um TEC de único estágio.

Quando a pastilha do cooler termoelétrico é submetida a uma corrente elétrica  $I$ , o fluxo de calor transferido para a extremidade fria da pastilha é devido a três fontes, conforme Equação 1:

$$q_{\text{pastilha}} = 0,5RI^2 + k(T_h - T_c) - \alpha IT_c \quad (1)$$

O primeiro termo da Equação 1 refere-se ao calor devido ao efeito Joule, o segundo refere-se ao calor transferido do substrato quente pela condutância da pastilha e o terceiro termo refere-se ao calor devido ao efeito Peltier.

Considerando  $N$  pastilhas, a equação governante da transferência de calor por condução é dada pela Equação 2:

$$k_s d \nabla^2 T_c - \frac{N_p (\alpha I + k) T_c}{L_1 L_2} + \frac{N_p \left( \frac{RI^2}{2} + k T_h \right)}{L_1 L_2} + \frac{Q_o}{4 \Delta \xi_1 \Delta \xi_2} \{u\} = 0 \quad (2)$$

Na Equação 2,  $k_s$  é a condutividade térmica do substrato,  $d$  é a espessura do substrato,  $T_c$  é a temperatura do substrato frio,  $T_h$  é a temperatura do substrato quente,  $\alpha$  é o coeficiente de Seebeck,  $I$  é a corrente elétrica,  $N$  é o número de pastilhas,  $k$  é a condutância da pastilha,  $L_1$  e  $L_2$  são as dimensões do substrato,  $R$  é a resistência elétrica associada,  $Q_o$  é a potência devido à fonte de calor,  $\Delta \xi_1$  e  $\Delta \xi_2$  são dimensões referentes ao objeto que está sendo resfriado e  $\{u\}$  é uma função que caracteriza a presença ou não da fonte de calor. Este último termo é dado pela seguinte equação:

$$\{u\} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i \in [\bar{\xi}_i - \Delta \bar{\xi}, \bar{\xi}_i + \Delta \bar{\xi}] \\ 0, & \text{se } x_i \notin [\bar{\xi}_i - \Delta \bar{\xi}, \bar{\xi}_i + \Delta \bar{\xi}] \end{cases} \quad (3)$$

As condições de contorno para o problema são dadas pela seguinte equação:

$$\left. \frac{\partial T_c}{\partial x_i} \right|_{x_i=0, x_i=L_i} = 0 \quad (4)$$

Apresenta-se a seguir o método de LB. No método de LB os detalhes dos movimentos e colisões das porções de fluido não interessam. O que importa é uma descrição efetiva e simples que retenha os efeitos macroscópicos e mesoscópicos globais, a ser realizada pela redução dos graus de liberdade dentro das interações caóticas das partículas fictícias sem afetar o comportamento global. Para tanto se modela um conjunto simples de partículas com uma topologia da rede razoável e regras de colisão apropriadas, resultando no cálculo das velocidades e pressão do fluido do comportamento caótico das moléculas por determinadas definições. Dessa forma, no método de LB a equação a ser resolvida nas escalas microscópicas ou mesoscópicas é a equação de transporte de Boltzmann (ver Sukop e Or, 2014) para a função de distribuição de probabilidade, sendo o termo mais complicado desta equação o relacionado com o termo de colisões que representa as interações mesoscópicas das partículas fictícias. A equação da evolução da função de distribuição das partículas no método LB se usa comumente considerando o operador de colisões simplificado de BGK (Kamali e Van den Akker, 2013), no qual as colisões se concebem como um processo simples de relaxação com uma constante de tempo  $\tau$  como segue (Gong e Cheng, 2012):

$$f_i(x + e_i \delta_t, t + \delta_t) - f_i(x, t) = -\frac{1}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)) \quad (5),$$

Em que  $f_i(x, t)$  é a função de distribuição de partículas com uma velocidade  $e_i$  na posição  $x$  e no tempo  $t$ ,  $\tau$  é o tempo de relaxação e  $f_i^{eq}(x, t)$  é a função de distribuição de equilíbrio correspondente, dada por:

$$f_i^{eq} = \omega_i T \left[ 1 + \frac{e_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_i \cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{u^2}{2c_s^2} \right] \quad (6),$$

Em que  $\omega_i$  os coeficientes de ponderação,  $u$  o vetor velocidade do fluido (não o real),  $c_s$  a velocidade do som da rede. Deve-se notar que para um problema puramente difusivo,  $u=0$ .

Para a estrutura de lattice tem-se  $\omega_i = \{4/9, 1/9, 1/9, 1/9, 1/9, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36\}$  e  $c_s^2 = 1/3$ . A estrutura de lattice D2Q9 (2 dimensões e 9 velocidades) foi utilizada e é apresentada abaixo:

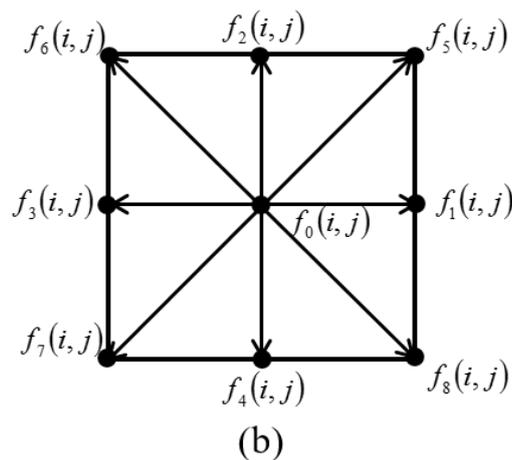


Figura 2: Estrutura de lattice D2Q9.

A temperatura é calculada por:

$$T = \sum_i f_i \quad (7)$$

A difusividade térmica é obtida pela utilização da expansão de Chapman-Enskog (Chapman e Cooling, 1970):

$$\alpha = c_s^2 \left( \tau_T - \frac{1}{2} \right) \delta_t \quad (8)$$

O algoritmo mostrado na Figura 3 é o ponto de partida para todos o código computacional desenvolvidos neste trabalho. As extensões do mesmo serão realizadas com base nos trabalhos de Huang et al. (2015) e Guo e Shu (2013).

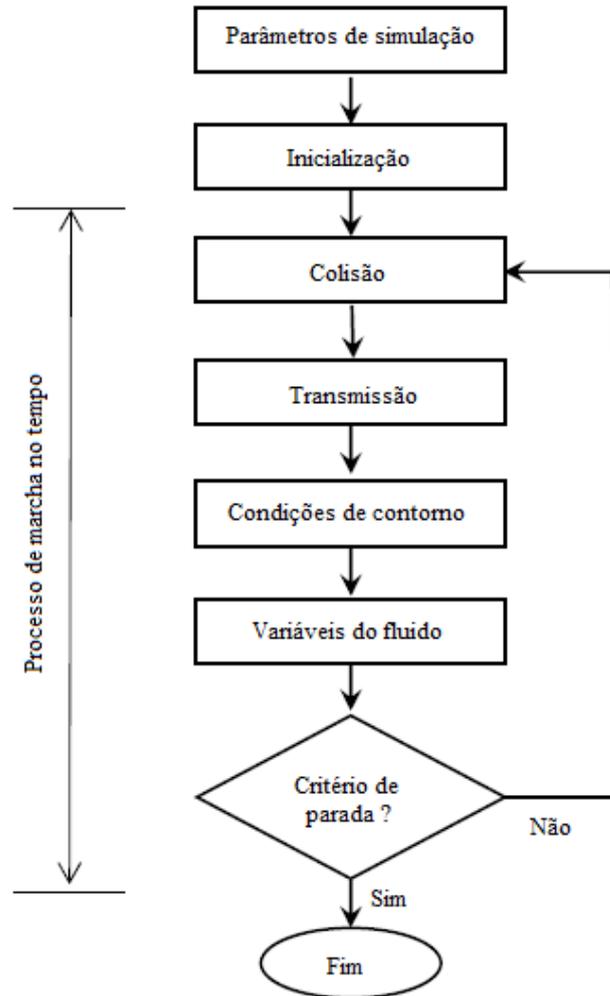


Figura 3: Diagrama de blocos do algoritmo computacional geral do método de LB.

## Resultados e discussão

A Tabela 1 apresenta os parâmetros operacionais de um TEC de simples estágio. Os parâmetros foram obtidos dos trabalhos de Chang et al. (2009) e Guzella et al. (2015):

Tabela 1: Tipos de tamanhos de letra nas partes deste documento.

Parâmetro	Valor	Unidade (SI)
Condutividade térmica do substrato frio	180	W/mK
Espessura do substrato	3,2	mm
Comprimento do substrato	40	mm
Comprimento da fonte térmica	30	mm
Potência da fonte térmica	60	W
Condutância da pastilha	1,392	W/K

Área da seção transversal da pastilha	$1,596 \cdot 10^{-6}$	$m^2$
Coefficiente Seebeck	0,0566	V/K
Número de pastilhas	16	-
Resistência elétrica	1,857	Ohm
Corrente elétrica	5	A

Três malhas (51x51, 101x101 e 201x201) com número crescente de nós foram consideradas para as simulações, considerando um resíduo de  $10^{-6}$  para convergência do campo de temperaturas. A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos pelo método de LB e a solução analítica aproximada.

Tabela 2 – Comparação entre os resultados numéricos e analítico-aproximado.

Grid	Método LB D2Q9 [K]		Solução analítica aproximada [K]	
	$\bar{T}_c$	$T_{c,max}$	$\bar{T}_c$	$T_{c,max}$
51x51	263.67777	265.09859	263.66190	265.10493
101x101	263.69567	265.11237		
201x201	263.65634	265.09295		

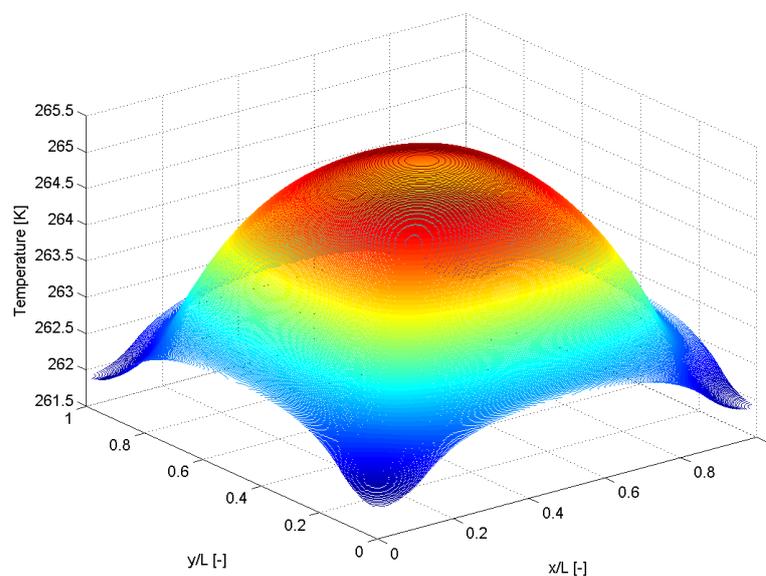


Figura 4: Distribuição de temperaturas obtido pela solução analítica.

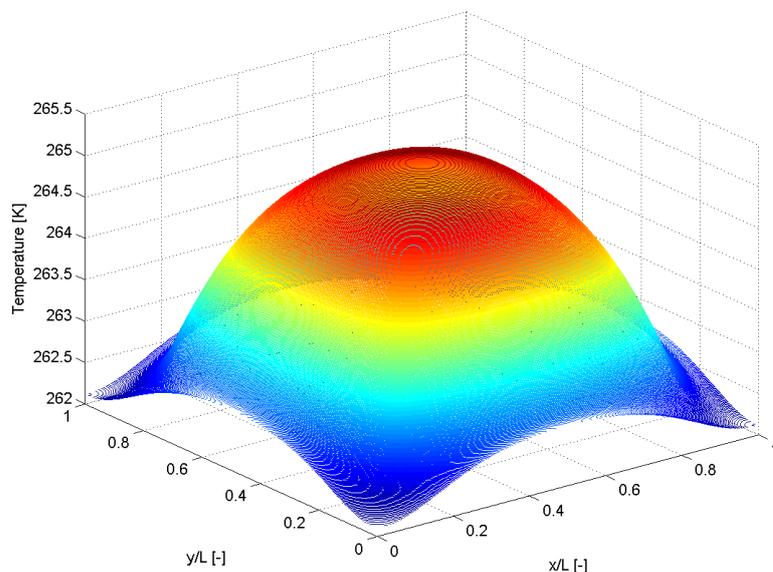


Figura 5: Distribuição de temperaturas obtido pela solução numérica utilizando o D2Q9.

A comparação das temperaturas máxima e média apresentou excelente resultados. Em relação aos perfis de temperatura, estes demonstram a robustez do método LB para solução da equação diferencial que representa a distribuição bidimensional de temperaturas no substrato frio. Adicionalmente, o método pode ser facilmente aplicado para outros problemas de difusão, assim como para problemas advectivos-difusivos com ou sem mudança de fase.

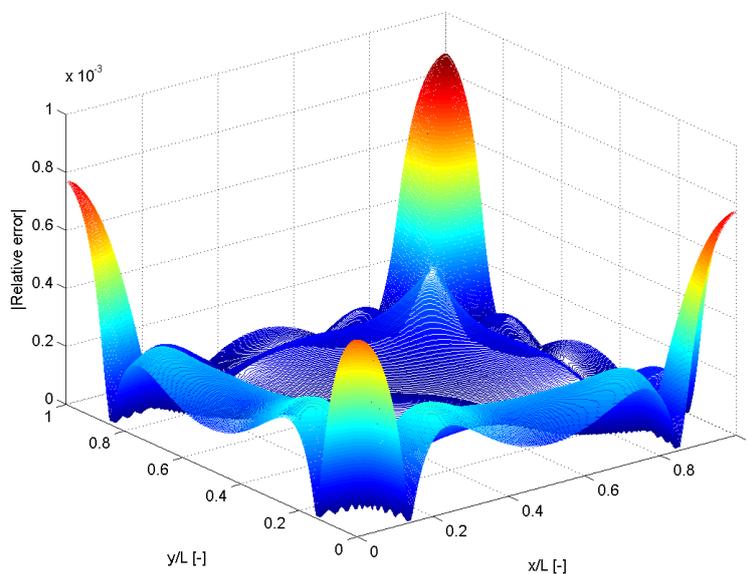


Figura 6: Erro relativo entre a solução numérica e a solução analítica aproximada.

## Referências

LI, Q., LUO, K.H., KANG, Q.J., HE, Y.L., CHEN, Q., LIU, Q. Progress in Energy Combustion and Science. **Lattice Boltzmann methods for multiphase flow and phase-change heat transfer**. In press, 2015

KAMALI, M.R., VAN DEN AKKER, H.E.A. Industrial & Eng. Chemistry Research. **Simulating Gas-Liquid Flows by Means of a Pseudopotential Lattice Boltzmann Method**, 52, 11365-11377, 2013.

DRABKI, I.A., YERSHOVA, L.B., KONDRATIEV, D.A., GROMOV, G.G. The effect of the substrates two-dimensional temperature distribution on the TEC performance, in: **Proceeding of 8th European Workshop on Thermoelectrics**, vol. 12, 2004.

DULNEV, G.N., POLSCHIKOV, B.V. Journal of Engineering Physics. **Temperature Field of a Plate with a Discrete Energy Source**, vol. 29, pp.722 – 727, 1976.

SUKOP, M.C., OR, D., 2004, Water Resources Research. **Lattice Boltzmann method for modeling liquid-vapor interface configurations in porous media**, 40, W01509.

GONG, S., CHENG, P. Computers & Fluids. **Numerical investigation of droplet motion and coalescence by an improved lattice Boltzmann model for phase transitions and multiphase flows**, 53, 93–104, 2012.

CHAPMAN, S. COWLING, T.G. **The Mathematical Theory of Non-uniform Gases: An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases**, 3th edition, Cambridge University Press, 1970.

HUANG, H., SUKOP, M.C., LU, X.Y. **Multiphase Lattice Boltzmann Methods: Theory and Application**, 1st ed., Wiley Blackwell, Singapore, Indonesia, 2015.

GUO, Z. SHU, C. **Lattice Boltzmann Methods and its Applications in Engineering**, 1st ed., Advances in Computational Fluid Dynamics, v. 3, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, Indonesia, 2013.

CHANG, Y. CHANG, C. KE, M. CHEN, S. Applied Thermal Engineering. **Thermoelectric air-cooling module for electronic devices**, vol. 29, pp. 2731–2737, 2009.

GUZELLA, M.S., CABEZAS-GÓMEZ, L, GUIMARÃES, L.G.M. International Journal of Applied and Computational Mathematics. **Numerical Computation and Analysis of the Numerical Scheme Order of the Two-Dimensional Temperature Field of Thermoelectric Coolers Cold Substrate**, p. 1-16, 2015.